FSJES-Aïn-Chock Casablanca — Année Universitaire : 2018-2019
Département : Économie & Gestion — Semestre 2 : Session normale
Matière : Algèbre — Prof. Ouail Ouchetto

Examen d'Algèbre : Correction

1. Calcul de $7B.A$ et $3A.B$:

$$\begin{aligned}
7B.A &= 7\begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 & 9 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix} \\
&= 7.(15+12-7+36) = 392 \\
3A.B &= 3\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 & 9 \end{pmatrix} \\
&= 3\begin{pmatrix} 15 & 56 & 3 & 27 \\ 10 & 12 & 2 & 18 \\ -35 & -42 & -7 & -63 \\ 20 & 24 & 4 & 36 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 45 & 56 & 9 & 81 \\ 30 & 36 & 6 & 54 \\ -105 & -126 & -21 & -189 \\ 60 & 72 & 12 & 108 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

2. Donnons u et v dans C mais $u+v \notin C$.
   Les veteurs (x,y,z) de C vérifient la relation $x+y-z^2=0$.
   Le vecteur $u=(1,0,1) \in C$ car $1+0-1^2=0$.
   Le vecteur $v=(0,4,2) \in C$ car $0+4-2^2=0$.
   Par contre $u+v=(1,4,3) \notin C$ car $1+4-3^2=-4 \neq 0$.

3. Déterminons $ker(p)$ le noyau de p :

$$\begin{aligned}
u=(x,y,z) \in ker(p) &\Leftrightarrow p(x,y,z)=(0,0,0) \\
&\Leftrightarrow (2x-3y+z, 4x-6y+2z)=(0,0) \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 2x-3y+z &=& 0 \\ 4x-6y+2z &=& 0 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow 2x-3y+z=0 \\
&\Leftrightarrow z=-2x+3y \\
&\Leftrightarrow u=(x,y,-2x+3y)=(x,0,-2x)+(0,y,3y) \\
&\Leftrightarrow u=(x,y,-2x+3y)=x(1,0,-2)+y(0,1,3)
\end{aligned}$$

   Donc le noyau de p est engendré par $\{(1,0,-2);(0,1,3)\}$.

4. Soient $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ et λ_1, λ_2 et $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\lambda_3u_3=u$.

$$\begin{aligned}
\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\lambda_3u_3=u &\Leftrightarrow \lambda_1(4,-7,3)+\lambda_2(3,\beta,7)+\lambda_3(1,4,-2)=(x,y,z) \\
&\Leftrightarrow (4\lambda_1+3\lambda_2+\lambda_3, -7\lambda_1+\beta\lambda_2+4\lambda_3, 3\lambda_1+7\lambda_2-2\lambda_3)=(x,y,z) \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 4\lambda_1+3\lambda_2+\lambda_3 &=& x \\ -7\lambda_1+\beta\lambda_2+4\lambda_3 &=& y \\ 3\lambda_1+7\lambda_2-2\lambda_3 &=& z \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -7 & \beta & 4 \\ 3 & 7 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad (1)
\end{aligned}$$

Le système $S = \{u_1, u_2, u_3\}$ n'est pas générateur de $\mathbb{R}^3$ si ce système matriciel (1) n'admet pas de solution. Autrement dit son déterminant est nul:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -7 & \beta & 4 \\ 3 & 7 & -2 \end{vmatrix} &= 0 \\ &= 4(-2\beta - 28) + 7(-6 - 7) + 3(12 - \beta) \\ &= -11\beta - 167 = 0\end{aligned}$$

Donc le système S n'est pas générateur de $\mathbb{R}^3$ si $\beta = -\frac{167}{11}$.

5. Déterminons l'ensemble des valeurs de α pour que le rang de p soit égal à 2.
Soit $B = \{e_1, e_\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{aligned} p(e_1) = p(1,0) &= (9,4) \\ p(e_2) = p(0,1) &= (\alpha, -5) \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} rang(p) = 2 &\Leftrightarrow rang(\{p(e_1), p(e_2)\}) = 2 \\ &\Leftrightarrow (9,4) \neq \beta(\alpha, -5) \\ &\Leftrightarrow \alpha \neq -\frac{45}{4} \end{aligned}$$

6. Donnons l'expression de A^{-1} en fonction de A et la matrie unitaire I.
D'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $P(A) = O_{nn}$:

$$\begin{aligned} P(A) = O_{nn} &\Leftrightarrow A^3 - 7A^2 + 4A + 2I = O_{nn} \\ &\Leftrightarrow 2I = -A^3 + 7A^2 - 4A \\ &\Leftrightarrow I = -\frac{1}{2}A^3 + \frac{7}{2}A^2 - 2A \\ &\Leftrightarrow A^{-1}.I = A^{-1}(-\frac{1}{2}A^3 + \frac{7}{2}A^2 - 2A) \\ &\Leftrightarrow A^{-1} = (-\frac{1}{2}A^2 + \frac{7}{2}A - 2I) \end{aligned}$$

7. L'écriture matricielle de (S) est :

$$AX = B \quad = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -6 \\ -3 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- L'inverse de A est :

$$\begin{aligned} A^{-1} = B &= \frac{1}{det(A)} {}^t com(A) \\ &= \frac{1}{148} \begin{pmatrix} 2 & -20 & 16 \\ 46 & 58 & -2 \\ -8 & 6 & 10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- L'ensemble de solutions est :

$$\begin{aligned} X &= A^{-1}B \\ &= \frac{1}{148} \begin{pmatrix} 2 & -20 & 16 \\ 46 & 58 & -2 \\ -8 & 6 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{66}{148} \\ \frac{112}{148} \\ \frac{-42}{148} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

8. Résolution du système (S_2) :

- Calcul de $|A|$:

$$\begin{aligned}|A| &= \begin{vmatrix} -1 & 4 & 8 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} \\ &= -1 \times (-5) - 3 \times (-28) + 4 \times 16 = 153\end{aligned}$$

- Calcul de $|N(x)|$:

$$\begin{aligned}|N(x)| &= \begin{vmatrix} 5 & 4 & 8 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 5 \times (-5) - 2 \times (-28) + 1 \times 16 = 47\end{aligned}$$

- Calcul de $|N(y)|$:

$$\begin{aligned}|N(y)| &= \begin{vmatrix} -1 & 5 & 8 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= -1 \times (-4) - 3 \times (-13) + 4 \times (-6) = 19\end{aligned}$$

- Calcul de $|N(z)|$:

$$\begin{aligned}|N(z)| &= \begin{vmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -1 \times (-7) - 3 \times (-11) + 4 \times 13 = 92\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} x &= \frac{|N(x)|}{|A|} = \frac{47}{153} \\ y &= \frac{|N(y)|}{|A|} = \frac{19}{153} \\ z &= \frac{|N(z)|}{|A|} = \frac{92}{153} \end{aligned}$$

L'ensemble de solutions est : $\{(\frac{47}{153}, \frac{19}{153}, \frac{92}{153}\}$

Rattrapage d'Algèbre 2018-2019 : Correction

(a) Calculons $(A-B)^2$:

$$\begin{aligned}(A-B)^2 &= \left(\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right)^2 \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 18 & 6 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

(b) Calcul de l'inverse d'une matrice

- Calculons A^{-1} :

$$\begin{aligned}A^{-1} &= \frac{1}{det(A)}{}^t com(A) \\ &= \frac{1}{-14}{}^t\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{14}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

- Calculons B^{-1} :

$$\begin{aligned}B^{-1} &= \frac{1}{det(B)}{}^t com(B) \\ &= \frac{1}{155}{}^t\begin{pmatrix} 26 & 53 & -4 \\ 6 & 48 & 11 \\ 19 & -3 & 9 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{155}\begin{pmatrix} 26 & 6 & 19 \\ 53 & 48 & -3 \\ -4 & 11 & 9 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

(c) Calcul des compositions $p_1 \circ p_2(x,y)$ et $p_2 \circ p_1(x,y)$:

$$\begin{aligned}p_1 \circ p_2(x,y) &= p_1(p_2(x,y)) \\ &= p_1(2x-y, 2x-3y) \\ &= (6(2x-y)-3(2x-3y), (2x-y)+2(2x-3y)) \\ &= (6x+3y, 6x-7y) \\ p_2 \circ p_1(x,y) &= p_2(p_1(x,y)) \\ &= p_2(6x-3y, x+2y) \\ &= (2(6x-3y)-(x+2y), 2(6x-3y)-3(x+2y)) \\ &= (11x-8y, 9x-12y)\end{aligned}$$

(d) On a $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 8y-3z=0\}$

$$\begin{aligned}\forall u=(x,y,z) \in G &\Leftrightarrow 8y-3z=0 \\ &\Leftrightarrow y = \frac{3}{8}z \\ &\Leftrightarrow u = (x, \frac{3}{8}z, z) \\ &\Leftrightarrow u = (x,0,0) + (0, \frac{3}{8}z, z) \\ &\Leftrightarrow u = x(1,0,0) + z(0, \frac{3}{8}, 1)\end{aligned}$$

Le système générateur de G est : $\{(1,0,0);(0,\frac{3}{8},1)\}$

(e) Déterminons $ker(p)$ le noyau de p :

$$\begin{array}{rcl} u=(x,y,z)\in ker(p) & \Leftrightarrow & p(u)=p(x,y,z)=(0,0,0) \\ & \Leftrightarrow & (x+2y-3z, 2x+4y-6z, x+3y-7z=(0,0,0) \\ & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{lcll} x+2y-3z & = & 0 & (1) \\ 2x+4y-6z & = & 0 & (2) \\ x+3y-7z & = & 0 & (3) \end{array}\right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{lcl} x+2y-3z & = & 0 \\ x+3y-7z & = & 0 \end{array}\right. \quad (1) \text{ et } (2) \text{ sont équivalentes} \\ & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -2y+3z \\ -2y+3z+3y-7z & = & y-4z=0 \end{array}\right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -8z+3z=-5z \\ y & = & 4z \end{array}\right. \\ & \Leftrightarrow & u=(-5z,4z,z)=z(-5,4,1) \end{array}$$

Donc le noyau de p est engendré par $\{(-5,4,1)\}$. Autrement dit $ker(p)=vect\{(-5,4,1)\}$

(f) Déterminons l'ensemble des valeurs de α pour que le rang de p soit égal à 1.
Soit $B=\{e_1,e_\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{array}{rcl} p(e_1)=p(1,0) & = & (9,4) \\ p(e_2)=p(0,1) & = & (\alpha,-5) \end{array}$$

Première méthode :

$$\begin{array}{rcl} rang(p)=1 & \Leftrightarrow & rang(\{p(e_1),p(e_2)\})=1 \\ & \Leftrightarrow & p(e_1)=\beta p(e_2) \\ & \Leftrightarrow & (9,4)=\beta(\alpha,-5) \\ & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{lcll} \beta\alpha & = & 9 & (1) \\ -5\beta & = & 4 & (2) \end{array}\right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{lcll} \beta & = & -\frac{4}{5} & (2) \\ \alpha & = & \frac{9}{\beta}=-\frac{45}{4} & (1) \end{array}\right. \end{array}$$

Deuxième méthode :

$$\begin{array}{rcl} rang(\{p(e_1),p(e_2)\})=1 & \Leftrightarrow & det[p(e_1),p(e_2)]=0 \\ & \Leftrightarrow & \left|\begin{array}{cc} 9 & \alpha \\ 4 & -5 \end{array}\right| = -45-4\alpha=0 \\ & \Leftrightarrow & \alpha=-\dfrac{45}{4} \end{array}$$

(g) Etudions la relation de dépendance qui existe entre u, v et w.
Soient α, β et γ tels que $\alpha u+\beta v+\gamma w=0$.

$$\begin{array}{rcl} \alpha u+\beta v+\gamma w=(0,0,0) & \Leftrightarrow & \alpha(0,-2,3)+\beta(1,0,-5)+\gamma(5,-2,-22)=(0,0,0) \\ & \Leftrightarrow & (\beta+5\gamma, -2\alpha-2\gamma, 3\alpha+-5\beta-22\gamma)=(0,0,0) \\ & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{lcll} \beta+5\gamma & = & 0 & (1) \\ -2\alpha-2\gamma & = & 0 & (2) \\ 3\alpha+-5\beta-22\gamma=0 & & & (3) \end{array}\right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{lcll} \beta & = & -5\gamma & (1) \\ \alpha & = & -\gamma & (2) \\ 0 & = & 0 & (3) \end{array}\right. \end{array}$$

Donc

$$\begin{aligned}\alpha u+\beta v+\gamma w=(0,0,0) &\Leftrightarrow -\gamma u+-5\gamma v+\gamma w=(0,0,0) \quad \forall\gamma\\ &\Leftrightarrow -u+-5v+w=(0,0,0)\\ &\Leftrightarrow u+5v=w\end{aligned}$$

(h) Résolution du système (S_2) :

- Calcul de $|A|$:

$$\begin{aligned}|A| &= \begin{vmatrix} -2 & 5 & 1\\ 7 & -1 & 2\\ 5 & -2 & 1\end{vmatrix}\\ &= -2\times 3-7\times 7+5\times 11=0\end{aligned}$$

- Calcul de $|N(x)|$:

$$\begin{aligned}|N(x)| &= \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1\\ -2 & -1 & 2\\ 4 & -2 & 1\end{vmatrix}\\ &= 2\times 3+2\times 7+4\times 11=64\end{aligned}$$

- Calcul de $|N(y)|$:

$$\begin{aligned}|N(y)| &= \begin{vmatrix} -2 & 2 & 1\\ 7 & -2 & 2\\ 5 & 4 & 1\end{vmatrix}\\ &= -2\times(-10)-7\times(-2)+5\times 6=64\end{aligned}$$

- Calcul de $|N(z)|$:

$$\begin{aligned}|N(z)| &= \begin{vmatrix} -2 & 5 & 2\\ 7 & -1 & -2\\ 5 & -2 & 4\end{vmatrix}\\ &= -2\times(-8)-7\times 24+5\times(-8)=-192\end{aligned}$$

L'ensemble de solutions est l'ensemble vide.